Отборочный тур Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом». Олимпиада им. И.В.Курчатова. Математика. 11 класс (2014-2015 учебный год)

Задания

1. В выражении $\left(2x^6+3\right)\left(1-x^3\right)^{14}$ раскрыли все скобки и привели подобные при одинаковых степенях x. Укажите значение коэффициента при x^{42}.

2. Найти максимально возможный радиус круга на плоскости, не содержащего внутри себя точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе уравнений : $\begin{cases} \cos^2\dfrac{\pi}{12}+\cos^2 x+\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)=1+2\cos\dfrac{\pi}{12}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right) \\ \sin 2y+\cos 2y+\sin y+\cos y+1=0 \end{cases}$.

3. Найти три целых числа x, y, z на отрезке $[100;300]$, для которых

$\text{НОД}(x,y)=3,\quad \text{НОД}(z,y)=8,\ \text{НОД}(x,z)=7$, а величина $x+y+z$ принимает наименьшее возможное значение.

4. При каких целых a и b уравнение $x^3+3x^2+ax+b=0$ имеет три различных корня на отрезке $[-2;1]$, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии?

5. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 2|x-a+3|+|2y+a|=4 \\ (x-y+3)(x-y+6)=0 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

6. Вершины правильного треугольника лежат на трех концентрических окружностях радиусов $3, 4, 5$ соответственно. Найти площадь треугольника.

Решения

Задача 1 Ответ: 185

Решение

Коэффициент a_{42} при x^{42} в выражении $\left(1-x^3\right)^{14}$ равен 1, в коэффициент при x^{36} равен $a_{36}=C_{14}^{12}=\dfrac{14\cdot 13}{2}=91$. Тогда в произведении коэффициент при x^{42} равен $2\cdot a_{36}+3\cdot a_{42}=2\cdot 91+3=185$.

Задача 2 Ответ: $R_{\max}=\dfrac{\pi\sqrt{265}}{24}$

Решение

1. Решение первого уравнения в системе:

$$\left(\cos\frac{\pi}{12}-\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right)^2=1-\cos^2 x=\sin^2 x\to\left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{\pi}{12}-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin x \\ \cos\dfrac{\pi}{12}-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)=-\sin x \end{array}\right..(1)$$

Преобразуем разность в произведение в первом уравнении системы (1):

$$-2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\to\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{x}{2}\right)=0\to$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi k \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\to\left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{12}+2\pi k \\ \frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}+2\pi m\to x\in\varnothing \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Второе уравнение в системе (1), помимо $x=2\pi k$, имеет решения:

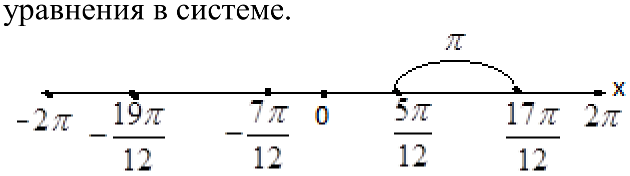
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\to\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)+2\pi k\to x\in\varnothing \\ x=\frac{17\pi}{12}+2\pi k,\ k\in Z \end{array}\right.$$

2. Решение второго уравнения в системе:

$$2\sin y\cos y+2\cos^2 y+\sin y+\cos y=0\to 2\cos y(\sin y+\cos y)+\sin y+\cos y=0\to$$

Преобразование: $$\to(\sin y+\cos y)\left(2\cos y+1\right)=0\to\left[\begin{array}{l} y=-\frac{\pi}{4}+\pi k \\ y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z \end{array}\right..$$

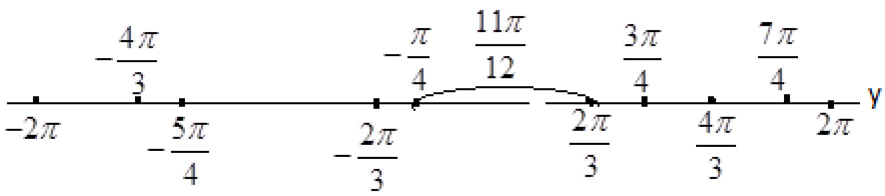
Найдем максимальную длину отрезка на оси OX, не содержащего внутри себя решений первого уравнения в системе.



.

Максимальную длина такого отрезка равна π.

Найдем аналогичный отрезок на оси ОУ для решений второго уравнения.



Его максимальная длина $\frac{11\pi}{12}$.

На плоскости имеется прямоугольник $ABCD$, например, с вершинами $A\left(\frac{5\pi}{12};-\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{12};\frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{17\pi}{12};\frac{2\pi}{3}\right)$, $D\left(\frac{17\pi}{12};-\frac{\pi}{4}\right)$ с максимальными длинами сторон, внутри которого нет решений системы. Длины его сторон равны $\frac{11\pi}{12}$ и π. Его диагональ – диаметр искомого круга $R_{\max}=\frac{\pi\sqrt{265}}{24}$.

Задача 3 Ответ: $x=147,\ y=120,\ z=112$

Решение

$$\text{НОД}(x,y)=3\to\begin{cases}x=3x_1\\ y=3y_1,\end{cases}\ \text{НОД}(x_1,y_1)=1,$$

$$\text{НОД}(z,y)=8\to\begin{cases}z=8z_2\\ y=8y_2,\end{cases}\ \text{НОД}(z_2,y_2)=1$$

$$\text{НОД}(x,z)=7\to\begin{cases}x=7x_3\\ z=7z_3,\end{cases}\ \text{НОД}(x_3,z_3)=1$$

$$x=3x_1=7x_3\to\begin{cases}x_1=7k\\ x_3=3k,\ k\in Z\end{cases}\to x=21k$$

Из равенств $$y=3y_1=8y_2\to\begin{cases}y_1=8m\\ y_2=3m,\ m\in Z\end{cases}\to y=24m$$

$$z=8z_2=7z_3\to\begin{cases}z_2=7n\\ z_3=8n,\ n\in Z\end{cases}\to z=56n$$

Условия на k,m,n :

$$НОД(k,8)=1,\ НОД(m,7)=1,\ НОД(k,m)=1,$$
$$НОД(n,3)=1,\ НОД(k,n)=1,\ НОД(n,m)=1\ ,$$

т.е. k,m,n - взаимно простые числа, k - не делится на 2, m - не делится на 7, n - не делится на 3.
Из условия, $100\le 56n\le 300\to n=2,4,5$ и наименьшее возможное значение $n=2$.
Из условия $100\le 24m\le 300\to m=5,...,12$, из условия $100\le 21k\le 300\to k=5,...,14$.
Если $n=2$, то минимально возможное $m=5$, при этом минимальное $k=7$.
Тогда $x=147,\ y=120,\ z=112\to x+y+z=379$.
Если $n=4$, то минимальное $m=5$, а $k=7$ и сумма $x+y+z$ принимает большее значение.
Наконец, если $n=5$, то минимальное $m=6$, а $k=7$ и сумма опять не минимальна.

Задача 4 Ответ: $a=2,\ b=0$

Решение

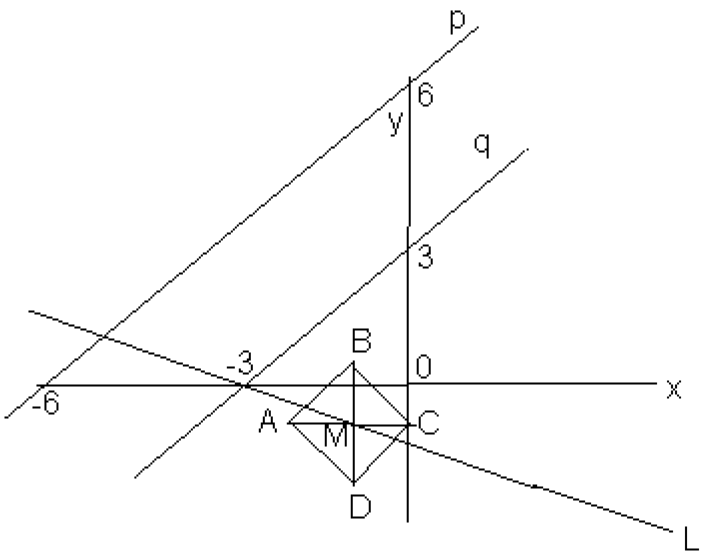
Пусть x_1,x_2,x_3- искомые решения. Тогда $x_1+x_2+x_3=-3$ и $x_1+x_3=2x_2\ \to 3x_2=-3\to x_2=-1$.
Разложим левую часть уравнения на множители:
$(x+1)(x^2+2x+a-2)=0.$ При этом $a-b=2$. Корни уравнения $x^2+2x+a-2=0$ должны существовать и принадлежать отрезку $[-2;1]$: $\begin{cases}a<3\\ -1-\sqrt{3-a}\ge -2\to a\in[2;3)\\ -1+\sqrt{3-a}\le 1\end{cases}$.

На этом множестве только одно целое $a=2$, при этом $b=a-2=0$.

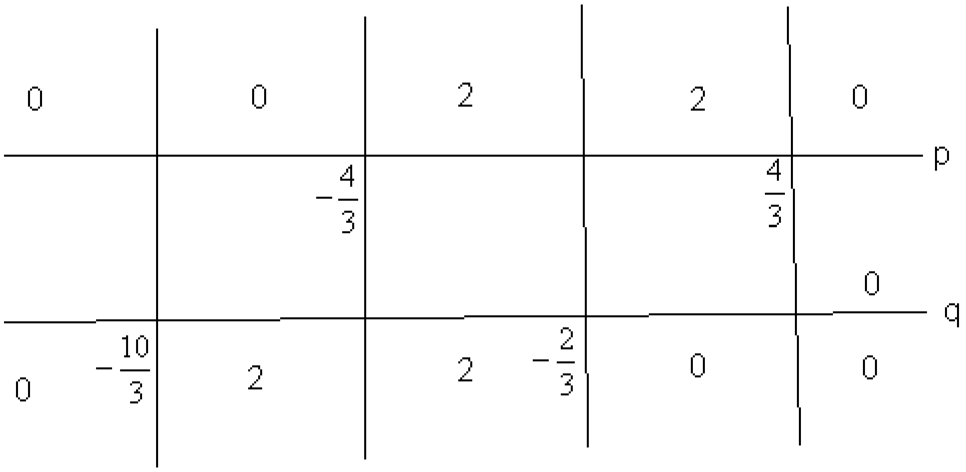
Задача 5 Ответ: $a\in\left(-\frac{10}{3};-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$

Решение

Первому уравнению системы удовлетворяют точки с координатами $(x;y)$, лежащие на границе квадрата $ABCD$ с центром в точке $M\left(a-3;-\frac{a}{2}\right)$ и сторонами AB и CD параллельными прямым $x-y=-3$ и $x-y=-6$.



При изменении параметра a центр квадрата движется по прямой L. Уравнение стороны AB: $x-y=\frac{3a}{2}-5$, стороны CD: $x-y=\frac{a}{2}-1$. Прямая AB совпадет с прямой q, если $\frac{3a}{2}-5=-3 \to a_1=\frac{4}{3}$, а прямая CD, если $\frac{3a}{2}-1=-3 \to a_2=-\frac{4}{3}$. Прямая AB совпадет с прямой p, если $\frac{3a}{2}-5=-6 \to a_3=-\frac{2}{3}$, а прямая CD, если $\frac{3a}{2}-1=-6 \to a_4=-\frac{10}{3}$.

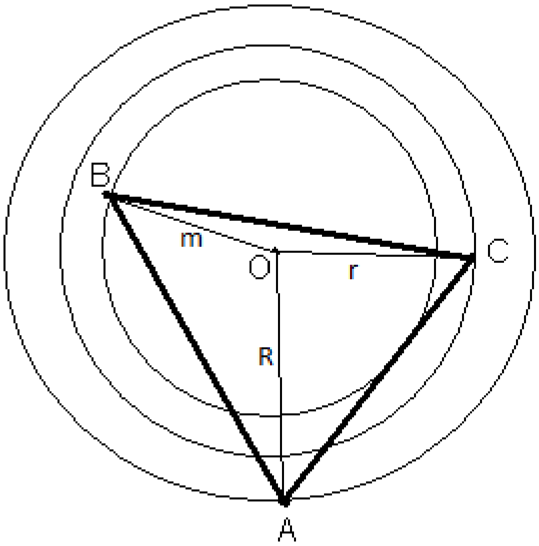


На рис. указано количество решений при пересечении квадрата $ABCD$ с прямыми p и q при различных значениях параметра a.

Два решения бывает, если $a \in \left(-\frac{10}{3};-\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

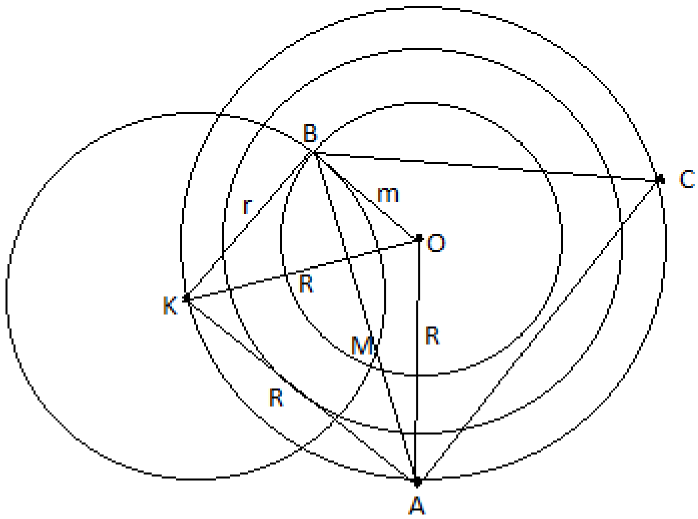
Задача 6 Ответ: $S=\frac{25\sqrt{3}\pm 36}{4}$

Решение



Дополнительные построения.

Повернем окружность радиуса r относительно точки A на 60^0 против часовой стрелки.
Тогда центр O перейдет в точку K, лежащую на окружности радиуса R. Окружность радиуса r с центром в точке K пересекает окружность радиуса m в точках B и M.
Отрезки AB или AM - стороны искомых двух треугольников.
Случай 1. Стороной треугольника является AB.



Треугольник AOK равносторонний, поэтому $OK = R$. $KB = r,\ OB = m$, угол AOK равен 60^0. Длина стороны AB в треугольнике ABO - искомая. Обозначим угол BOK через α. Значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ находятся из треугольника KBO по теореме косинусов, так как известны три его стороны. Условием разрешимости данной задачи является существование треугольника со сторонами R, r и m. Тогда длина AB определяется теоремой косинусов, примененной к треугольнику ABO.

$$a^2 = R^2 + m^2 - 2Rm\cos(\alpha + 60^0)$$

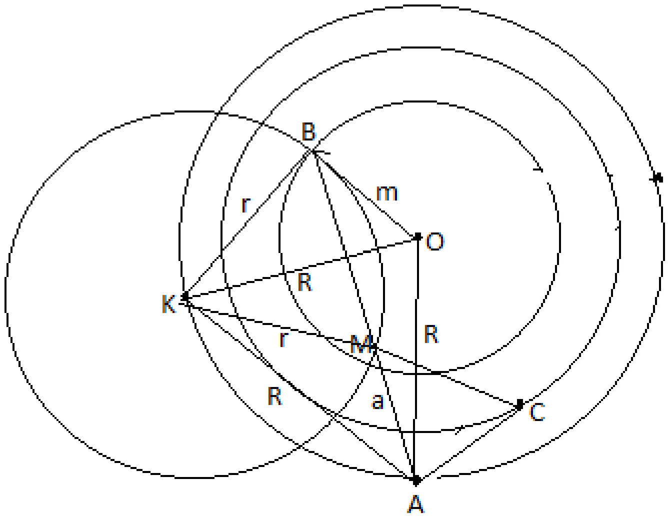
а площадь искомого треугольника $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

В условиях варианта 1 $R = 5,\ r = 4,\ m = 3$. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{3}{5},\ \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

$$a^2 = 25 + 9 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) = 25 + 12\sqrt{3}\ .$$

Тогда площадь $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{36 + 25\sqrt{3}}{4}$.

Случай 2. Стороной треугольника является AM .



Длина стороны AM считается из треугольника AKM . Обозначим через β угол BKO. Его $\cos\beta$ и $\sin\beta$ вычисляются по теореме косинусов, примененной к треугольнику BKO Тогда угол AKM равен $60^0-\beta$ и длина стороны AM вычисляется по теореме косинусов по формуле:

$$a^2=R^2+r^2-2Rr\cos(60^0-\beta).$$

В условиях варианта 1 $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $a^2=25-12\sqrt{3}$, а $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{25\sqrt{3}-36}{4}$